o Saber

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPLEMENTARIDADE NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

AN INTRODUCTION TO COMPLEMENTARITY THEORY IN MATHEMATICAL EDUCATION

BARROS, Luiz Gonzaga Xavier de, Doutor*
FRANÇA, Sávio Mendes, Doutor**

*Universidade Santa Cecília – UNISANTA
Rua Oswaldo Cruz, 277 – Boqueirão, Santos/SP
CEP: 11045-907
Tel: (13) 3202-7100
luizbarros@unisanta.br

**Faculdade de Tecnologia de Praia Grande – FATEC-PG
Praça 19 de Janeiro, 144, Boqueirão, Praia Grande/SP
CEP: 11700-100
Tel:(13) 3591-1303
saviomf@terra.com.br

RESUMO

Na área de Educação Matemática, muitos trabalhos acadêmicos têm como objetivo identificar um entendimento de aspectos epistemológicos do ensino e aprendizagem da Matemática. Algumas pistas para essa busca podem ser encontradas na História e na Filosofia da Matemática, pois por meio do estudo de como ocorreu a construção do conhecimento da Matemática, pode-se compreender melhor o processo de ensino e aprendizagem dessa ciência. O Princípio da Complementaridade na Educação Matemática se transformou numa ferramenta muito eficaz para a interpretação desses aspectos epistemológicos, pois se apropria de conhecimentos da História, da Filosofia e da Semiótica para estudar as relações dinâmicas existentes nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática ou na construção do conhecimento matemático. Por fim este artigo tem como objetivo apresentar o Princípio da Complementaridade na Educação Matemática para que, por meio dele, se tenha uma interpretação de como pode ocorrer o ensino e aprendizado de conhecimentos técnicos ou tecnológicos por meio do Princípio da Complementaridade, tomando por base o que já foi feito na Educação Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Complementaridade. História da Matemática. Filosofia. Educação Matemática. Educação Tecnológica.

ABSTRACT

In Mathematics Education area, many academic papers are intended to identify an understanding of epistemological teaching and learning of Mathematics. Some clues to this search can be found in the History and Philosophy of Mathematics, because through the study of how the knowledge construction of Mathematics, one can better understand the teaching and learning process of this science. The Principle of Complementarity in Mathematics Education *has become a very effective tool for the interpretation of these epistemological aspects because it appropriates knowledge of History, Philosophy and Semiotics to study dynamic relations existing in the processes of teaching and learning Mathematics or in the construction of mathematical knowledge. Finally, this article aims to present the Principle of Complementarity in Mathematics Education so that, through it, a portrayal of how the teaching and learning of Technological or technical knowledge can occur through the Principle of Complementarity, based on what has been done in Mathematics Education.*

***KEYWORDS**: Complementarity. History of Mathematics. Philosophy. Mathematics Education. Technological Education.*

INTRODUÇÃO

O Princípio da Complementaridade, em linhas gerais, afirma que, para caracterizar certos fenômenos ou conceitos é necessário apresentar características que, embora aparentemente contraditórias, se complementam para uma descrição completa.

Foi apresentado pelo físico Niels Bohr na primeira metade do século XX com o objetivo de oferecer um ponto de vista conciliador na explicação de alguns fenômenos físicos que, quando estudados por meio da Física Clássica, apresentavam representações distintas das obtidas por meio da Física Quântica.

O Princípio da Complementaridade na Educação Matemática (PCEM), uma adaptação do Princípio da Complementaridade de Bohr, foi apresentado em 2003, por Michael Friedrich Otte no artigo: "*Complementarity, Sets and Numbers*", publicado na revista "*Educational Studies in Mathematics Education"*. Tem como objetivo mostrar, com o auxílio da Semiótica, a importância da História da Matemática e da Filosofia da Matemática para as pesquisas em Educação Matemática por meio das interpretações das complementaridades existentes na construção ou obtenção dos conhecimentos matemáticos.

Desde então, o PCEM tem se mostrado como uma teoria científica e filosófica muito eficaz para a interpretação de fatos ou conceitos da Matemática, da História da Matemática ou da Filosofia da Matemática. Além disto, por meio do PCEM é possível encontrar explicações para aspectos epistemológicos e cognitivos da construção ou do aprendizado do conhecimento matemático.

> Devido ao fato de apresentar na sua estrutura, simultaneamente, características de ciência e de linguagem, a Matemática pode ser caracterizada como uma atividade semiótica. A relação dinâmica entre ciência e linguagem permite que situações da Educação Matemática possam ser estudadas epistemologicamente utilizando o PCEM. Por exemplo, a Matemática, vista como linguagem, apresenta duas formas: a linguagem geométrica e a linguagem algébrica, as quais são complementares, reflexo da complementaridade que existe na Matemática, vista como ciência, quando observamos a relação dinâmica entre a Álgebra e a Geometria (BARROS e FRANÇA, 2018, p.3).

1. O PRINCÍPIO DA COMPLEMENTARIDADE DE NIELS BOHR

Niels Henrik David Bohr nasceu em 7 de outubro de 1885 em Copenhague na Dinamarca e faleceu em 18 de novembro de 1962, também em Copenhague. Foi um físico cujos trabalhos trouxeram um ponto de vista conciliador entre a Física Newtoniana Clássica e a Física Quântica Moderna, auxiliando assim, na explicação e compreensão de alguns fenômenos atômicos estudados no início do século XX. Em 1923, formulou o Princípio da Correspondência e, em 1927, o Princípio da Complementaridade. Entre os vários prêmios que Niels Bohr recebeu ao longo de sua vida, está o Nobel de Física em 1922.

Em 1927, no Congresso Internacional de Física em memória do centenário da morte de Alessandro Volta, realizado na cidade de Como, na Itália, Niels Bohr apresentou pela primeira vez a sua concepção filosófica sobre as formas distintas de interpretação de fenômenos físicos, por meio da Física Clássica e da Física Quântica. A concepção de Bohr tinha como objetivo observar a complementaridade existente entre estes dois ramos da Física. Posteriormente, essa concepção se mostrou mais abrangente do que sua própria intensão inicial, atingindo os variados campos das ciências, como por exemplo, na Biologia, da Psicologia, da Educação entre outros.

Ao apresentar o Princípio da Complementaridade, Niels Bohr usou apenas ideias simples para descrever o seu ponto de vista metodológico, sem apelar a aspectos teóricos e matemáticos, mas que tinham como finalidade dar consenso à controvérsia existente entre os pontos de vista de diversos cientistas renomados da época. Essa controvérsia se dava, principalmente, pelo fato de existir naquela época, uma dicotomia no estudo de alguns fenômenos físicos que podiam ser descritos, concomitantemente e de forma distinta, através da Física Clássica e através da Física Quântica.

O principal exemplo da dicotomia existente entre a Física Clássica e a Física Quântica, e que foi usado por Bohr em sua apresentação de 1927, se refere à interpretação da propagação da luz dada na época. Tanto a Física Clássica quanto a Física Quântica apresentavam formas distintas de descrição da propagação da luz no espaço. Na interpretação da Física Clássica, dada pelo cientista escocês James Clerk Maxwell (1831 - 1879), o estudo da propagação da luz é realizado através da teoria das ondas eletromagnéticas. Já na interpretação da Física Quântica, o estudo da propagação da luz é feito por meio da teoria da radiação de matéria, mais especificamente pela radiação de partículas fotoelétricas, chamadas na época de quantum e hoje conhecidas como fótons, seguindo o princípio fundamental da Física Quântica do físico e matemático alemão Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 - 1947).

Havia desta forma, duas teorias distintas para o estudo da propagação da luz e também existia, na época, a necessidade de contornar essa dicotomia, procurando-se encontrar fatos que levassem à imersão de uma teoria dentro da outra. No artigo "*As raízes da Complementaridade*", de Holton (1984), para ilustrar a controvérsia existente entre a Física Clássica e a Quântica naquela época, encontra-se uma citação feita por Albert Einstein (1879 – 1955) em 1924:

> Agora temos duas teorias da luz, ambas indispensáveis, porém admitamos, sem nenhuma conexão lógica entre si, apesar de vinte anos de enorme esforço dos físicos teóricos (EINSTEIN *apud* HOLTON, 1984, p.50).

Na impossibilidade de uma imersão de uma teoria na outra, Bohr propôs que não devíamos evidenciar a dicotomia existente entre as duas teorias, como no exemplo da propagação da luz, mas que devíamos nos atentar à complementaridade das possíveis interpretações de um fenômeno tanto da Física Clássica quanto da Física Quântica. Em suma, Bohr propôs que, quando é possível, o entendimento dos resultados de um fenômeno pode ser apresentado por meio de um modelo complementar de descrição. Ou seja, ele propôs que existe uma Complementaridade entre as representações da Física Clássica e da Física Quântica.

Outro exemplo que também pode ser interpretado pela proposta de Bohr, é obtido na análise da interferência do observador ou dos instrumentos utilizados na observação de um fenômeno, no próprio fenômeno. Por um lado, enquanto na Física Clássica a descrição de um fenômeno sofre pequena interferência do observador ou dos instrumentos utilizados, motivo pelo qual essa interferência é desprezada. Por outro lado, na Física Quântica, tal interferência é relevante e um fenômeno não pode ser interpretado sem que sejam levados em conta a participação do observador ou os instrumentos utilizados, isto é, o observador e seus instrumentos fazem parte do experimento.

Existe também o problema das interferências externas de outros fenômenos num fenômeno específico que esteja sendo estudado, como por exemplo, a interferência da luz no estudo do movimento de grandes objetos.

Na descrição deste tipo de fenômeno pela Física Clássica, embora exista uma pequena interferência externa de outros fenômenos, isso não é levado em conta, fazendo com que o sistema observado seja considerado fechado, a interferência da luz neste tipo de movimento, em geral, tão pequena que é desprezada.

Na descrição de um fenômeno pela Física Quântica, as interferências externas são extremamente importantes e a interpretação de um fenômeno não pode ser feita sem se levar em conta essa interferência, por exemplo, a interferência da luz no estudo do movimento dos elétrons de um átomo, torna esse movimento arbitrariamente impreciso e, portanto, a sua participação é extremamente relevante.

Segundo Bohr, ambas descrições (a clássica e a quântica) devem ser consideradas verdadeiras apesar de não poderem ser utilizadas ao mesmo tempo. Na Física Clássica, a separação de um fenômeno estudado das interferências externas ou do observador, ocorre naturalmente e o mesmo já não pode ser dito sobre a Física Quântica. Holton (1984) ainda descreve que posteriormente, em 1949, Bohr acrescenta sobre a palestra que havia dado em 1927:

> Numa palestra naquela ocasião, defendi um ponto de vista convenientemente denominada complementaridade, adequado para abarcar os aspectos característicos da individualidade dos fenômenos quânticos e, ao mesmo tempo, esclarecer aspectos peculiares observáveis neste campo de experiência. Por esta razão, é decisivo reconhecer que, embora os fenômenos transcendam em muito à abrangência da explicação da Física Clássica, a representação de toda evidência deve ser expressa em termos clássicos (BOHR *apud* HOLTON, 1984, p.51).

Resumidamente, muito embora um fenômeno apresente diversas características, muitas delas podem não ser observadas num único experimento específico e devemos, então, nos atentar ao fato de que todo experimento é individual e único. As interferências ao qual está sujeito, quer sejam do observador e seus instrumentos, quer sejam externas, são motivos pelos quais, um experimento deve ser descrito de forma clássica, com o objetivo de uma explicação simples, geral e conciliadora.

Para esclarecer ainda mais a participação do observador e seus instrumentos no estudo de um determinado fenômeno, por meio de um experimento, realizado sobre determinadas condições, Holton (1984) então resume em seu artigo o seguinte:

> O que Bohr estava mostrando, em 1927, era a descoberta curiosa de que no domínio atômico, a única maneira pela qual o observador (incluindo seu equipamento) podia não ser envolvido era se ele não observasse nada. Tão logo monta seu equipamento de observação, o sistema que escolheu para a observação e os instrumentos de medida para realizar o trabalho, formam um todo inseparável (HOLTON, 1984, p.51).

Além disso, um único experimento não é capaz de mostrar simultaneamente aspectos da Física Clássica e da Física Quântica. Ele mostrará somente uma das duas possibilidades, como por exemplo, um experimento sobre a propagação da luz não é capaz de mostrar simultaneamente aspectos de onda eletromagnética e de radiação de partículas. Desta forma, somente a totalidade das diferentes condições experimentais que um fenômeno pode ter e a sua representação nas duas correntes da Física, é que podem caracterizar de fato o fenômeno estudado, ou seja, através da Complementaridade entre a Física Clássica e a Física Quântica.

2. O PRINCÍPIO DA COMPLEMENTARIDADE NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Descrever o PCEM como uma metodologia científica e filosófica não é um trabalho fácil. Isto ocorre pelo fato de relacionar a Filosofia e a História da Matemática com a Educação Matemática e consequentemente com a Matemática e suas aplicações (ciências humanas com ciências exatas), por meio de processos semióticos. Devido a esta dificuldade, o PCEM não possui uma definição, mas sim um conceito.

Pode-se observar apenas que existe uma sutil diferença entre definição e conceito. No meio científico filosófico é preciso trabalhar muito bem com as ideias, conceitos são criados a partir da interação entre as ideias e se caracterizam por possuírem um aspecto de constante construção ao invés das definições, que estão mais presentes no meio científico matemático, elas, por sua vez, devem ser claras, precisas e concisas, por possuírem um aspecto mais estático. Existe uma relação dinâmica complementar entre definição e conceito que também é caracterizada pelo PCEM e, esta relação, também tem uma grande importância para a Educação Matemática.

Além disso, existem muitos detalhes e nuances importantes de caráter epistemológico e cognitivo que podem ser encontrados no PCEM e que passariam despercebidos, através de apenas uma simples tentativa de reduzi-lo a uma descrição lógica. Otte (2003) descreve uma caracterização do PCEM a partir da descrição de aspectos complementares obtidos pelo estudo da relação dinâmica entre sentido e referência na Matemática, usando como exemplo o estudo das noções de conjuntos e de números.

Percebe-se que a Matemática pode ser caracterizada como uma atividade semiótica, devido ao fato de apresentar ao mesmo tempo, na sua estrutura, características de ciência e de linguagem. Por ser ciência a Matemática apresenta características de descoberta, assim como ocorre nas ciências naturais. Por ser linguagem, a Matemática passa a ser de fato uma atividade semiótica e apresenta características de criação, assim como ocorre nas artes em geral.

A História da Matemática mostra que a construção do conhecimento matemático ocorreu tanto por criação como por descoberta, pois quando um determinado conhecimento matemático, necessário para se resolver um determinado problema, ainda não existia, foi a mente humana, a partir da intuição e de experimentos mentais de um ou mais cientistas matemáticos, que criou a solução para o problema. A partir da criação dessa estrutura matemática inicial, outros cientistas matemáticos descobriram as propriedades decorrentes desta criação e assim sucessivamente, novas definições foram criadas e novas propriedades foram descobertas, produzindo assim, uma teoria completa através de um processo dinâmico que alterna características de criação e descoberta.

> Essa alternância entre as características de descoberta e criação no processo de construção do conhecimento matemático, por muitas vezes, torna difícil uma caracterização ou distinção entre elas no contexto como um todo. Percebe-se com isto, que descoberta e criação são características intrínsecas que coexistem simultaneamente neste processo (BARROS e FRANÇA, 2018, p.11).

Outro exemplo de Complementaridade que ocorre na Matemática é a relação dinâmica entre a Álgebra e a Geometria. Por exemplo, somente foi provado, por meio da Álgebra, que não é possível duplicar um cubo (uma questão geométrica). Outro exemplo, o produto notável $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (uma questão algébrica), primeiro foi provado com o uso da Geometria, e por este motivo, valia apenas para grandezas positivas. Posteriormente a Álgebra permitiu a generalização desta fórmula.

Observa-se, que a Matemática é rica em características complementares e para um bom entendimento do conceito do PCEM, é de grande utilidade a descrição de exemplos de como ocorrem essas complementaridades na Matemática. Por este motivo, será apresentada, a seguir, uma descrição das relações dinâmicas existentes entre o par intensão e extensão, sob alguns aspectos filosóficos e semióticos. Essas relações podem ser aplicadas em vários contextos do processo de construção ou obtenção do conhecimento matemático, auxiliando assim, numa melhor compreensão dos detalhes do PCEM.

3. A COMPLEMENTARIDADE ENTRE INTENSÃO E EXTENSÃO

Neste tópico será feita uma interpretação da complementaridade entre os entes filosóficos intensão e extensão na Educação Matemática. Por esta razão é de grande interesse entender o significado destes dois entes.

Segundo Abbagnano (2000, p.39) os termos intensão e extensão são apresentados juntos e são definidos por Hamilton como: "A quantidade interna de uma noção, sua Intensão ou compreensão, é constituída por diferentes atributos cuja soma é o conceito, no sentido de que este reúne os vários caracteres conexos num todo pensado. A quantidade externa de uma noção, ou a sua extensão, é constituída pelo número de objetos que são pensados imediatamente através do conceito".

Além disso, em Abbagnano (2000) encontra-se também: O uso desses dois termos ainda prevalece na lógica contemporânea, que os associou à distinção estabelecida por Frege entre sentido e significado. Frege disse: "Ao pensarmos num signo, deveremos ligar a ele duas coisas distintas: não só o objeto designado, que será denominado significado daquele signo, mas também o sentido ao signo, que denota a maneira como esse objeto nos é dado". Obviamente, o objeto é a extensão; o sentido é a intensão. Essa distinção é repetida ou pressuposta por quase toda lógica contemporânea.

E ainda Abbagnano (2000) acrescenta: A Intensão de um termo é definida por Lewis como "a conjunção de todos os outros termos, cada um dos quais deve ser aplicável àquilo a que o termo é corretamente aplicável". Nesse sentido, a intensão (ou conotação) é delimitada por toda definição correta do termo e representa a intenção de quem o emprega por isso, tem o significado primeiro de "significado". A extensão (ou denotação) de um termo, porém, é a classe das coisas reais às quais o termo se aplica.

Para interpretarmos a intensão e a extensão nas expressões linguísticas, é preciso primeiro entender que um juízo (ideia, conceito ou conhecimento) pode ser interpretado como uma proposição, e, por sua vez, uma proposição é uma relação entre um sujeito e um predicado. Sujeito e predicado são expressões linguísticas. Em Semiótica as expressões linguísticas podem ser classificadas em dois tipos, com características diferentes quanto ao número de elementos que ela representa. Elas podem representar termos singulares ou podem representar termos gerais.

Em geral, os sujeitos estão associados a um único elemento ou a um único conjunto de seres ou objetos, concretos ou abstratos. Desta forma, o sujeito de uma proposição, em geral, está associado a uma expressão linguística que é um termo singular. Por outro lado, os predicados indicam uma propriedade ou uma característica que o sujeito (termo singular) pode ter. Desta forma, o predicado de uma proposição, em geral, está associado a uma expressão linguística que é um termo geral.

Os termos gerais que estão associados a um predicado, podem ser interpretados de duas maneiras distintas. A primeira se refere à característica ou propriedade que o predicado estabelece e a segunda se refere ao conjunto de todos os indivíduos (seres ou objetos, concretos ou abstratos) que estão associados à característica ou propriedade que o predicado estabelece.

O conjunto de todos os indivíduos ao qual a expressão linguística do predicado se aplica, isto é, que faz com que a proposição como um todo seja verdadeira, é chamado de extensão da expressão linguística do predicado. Por outro lado, a propriedade ou característica à qual o predicado se refere, é um conceito que possui um significado cognitivo e, por este motivo, é chamado de intensão da expressão linguística do predicado.

Por exemplo, na proposição “O Brasil é um país da América do Sul”. Brasil é o sujeito da proposição e, portanto, é um termo singular. País da América do Sul é o predicado. O predicado indica a característica de algum país estar geograficamente na América do Sul e esta é a sua intensão, mas a sua extensão é o conjunto de todos os países que pertencem à América do Sul. Pode-se perceber, por este exemplo, que um predicado está associado a uma intensão e cada intensão determina uma única extensão.

Porém existem situações em que uma mesma extensão pode ser determinada por intensões diferentes. Por exemplo, pode-se perceber este fato através das proposições: “O número 3 é um número primo maior que 2 e menor que 10” e “O número 5 é um número ímpar maior que 2 e menor que 8”.

Na primeira proposição o sujeito é o “número 3” e o predicado é um “número primo maior que 2 e menor que 10”. Este predicado indica a propriedade de um número ser primo e ao mesmo tempo é maior que 2 e menor que 10 e esta é a intensão deste predicado, mas a extensão deste predicado é o conjunto {3,5,7} que é o conjunto de todos os números que satisfazem a propriedade associada à intensão.

Na segunda proposição o sujeito é o “número 5" e o predicado é “número ímpar maior que 2 e menor que 8”. Este predicado indica a propriedade de um número ser ímpar e ao mesmo tempo ser maior que 2 e menor que 8 e esta é a intensão deste predicado, mas a extensão deste predicado é o conjunto {3,5,7} que é o conjunto de todos os números que satisfazem a propriedade associada à intensão.

Observa-se que a intensão da primeira proposição é diferente da intensão da segunda proposição, pois o conceito de número primo maior que 2 e menor que 10 é diferente do conceito de número ímpar maior que 2 e menor que 8. Porém observa-se que a extensão do predicado da primeira proposição é a mesma extensão do predicado da segunda extensão, o conjunto {3,5,7}.

A extensão de um predicado de uma proposição pode ser um conjunto infinito, um conjunto finito ou o conjunto vazio. Exemplos para tais afirmações são:

Para a primeira “O número 4 é um número par”, pois a extensão do predicado “número par” é um conjunto com infinitos elementos.

Para a segunda “O Brasil é um país da América do Sul”, pois a extensão do predicado “país da América do Sul” é, obviamente um conjunto com uma quantidade finita de elementos.

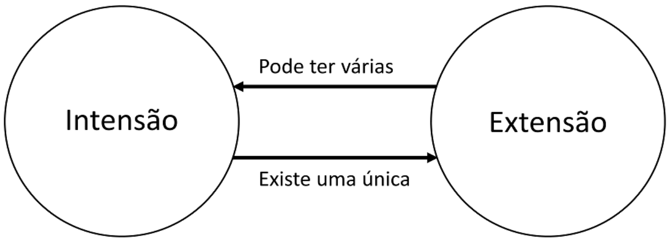
Para a terceira “A representa um número primo e par maior que 7”, pois a extensão do predicado “número primo e par maior que 7” é o conjunto vazio, pois não existe nenhum número primo par que seja maior que 7.

Outro exemplo da relação dinâmica entre intensão e extensão na Matemática ocorre no estudo de funções. Quando se define o que é uma função de variável real a valores reais, a intensão é o conceito de função de variável real a valores reais e a extensão é o conjunto de todas as funções existentes que são atingidas pela definição. Obviamente é impossível se estudar ou se conhecer todas as funções existentes, mas estudando algumas das extensões do conceito de função, como por exemplo, as funções polinomiais do primeiro grau e as funções polinomiais do segundo grau, é possível obter um conhecimento inicial desse conceito.

Para se conhecer inteiramente o conceito de função de variável real é necessário conhecer não apenas a sua intensão como também conhecer várias das suas extensões. Quanto mais extensões de função de variável real forem estudadas, maior será o conhecimento obtido sobre o conceito função de variável real.

Observa-se que, se for dada uma extensão, é possível encontrar para ela uma intensão (que não precisa ser única) que está associada a essa extensão dada. Por outro lado, dada a intensão, como foi visto anteriormente, existe uma única extensão associada a essa intensão dada, pois a extensão é um conjunto.

Figura 1 - A relação entre intensão e extensão



Fonte: FRANÇA (2017).

Quando estudada pelo PCEM, essa relação dinâmica entre intensão e extensão, caracteriza uma complementaridade entre esses dois entes filosóficos e tem um grande valor no processo cognitivo de construção ou de aprendizado dos conceitos, em particular, dos conceitos da Matemática e, por este motivo, para a Educação Matemática.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na construção ou aprendizado de um objeto ou conceito matemático, cada nova intensão estabelecida traz como resultado a obtenção de novas extensões, ou seja, de objetos com as mesmas características. Desta forma, quanto maior for a intensão de um objeto ou conceito, através de representações adequadas ou propriedades mais avançadas e numa quantidade cada vez maior, menor será o conjunto de elementos atingidos por ela, e consequentemente a extensão será cada vez menor, promovendo assim, um entendimento cada vez maior dos objetos ou conceitos matemáticos.

Esse processo, em geral, começa através da intuição e dos primeiros experimentos mentais, passa por um processo racional que envolve as provas formais das primeiras estruturas, e depois, através de novos experimentos mentais e de novas provas formais, estruturas decorrentes das primeiras são obtidas e, assim, sucessivamente vai se promovendo um refinamento cada vez maior da teoria. Além disso, também podemos observar que a melhoria das notações simbólicas, através da obtenção de representações algébricas e geométricas dos objetos, facilita o entendimento e a aceitação da teoria até que seja feita uma formalização mais completa.

Uma abordagem feita através da complementaridade entre a História e a Filosofia tem a capacidade de mostrar e enfatizar outras complementaridades existentes no processo de obtenção de teorias da Matemática, entre elas citamos as complementaridades entre sentido e referência, representação e objeto, analítico e sintético, criação e descoberta e empirismo e racionalismo.

A partir das ideias apresentadas e discutidas na Complementaridade entre intensão e extensão, é possível fazer uma boa descrição do que venha a ser o PCEM através da caracterização de aspectos complementares entre dois conceitos. É importante lembrar que não se trata de uma definição (que sempre é muito bem vinda para os matemáticos, porém não é este o caso), mas de fato, trata-se de um conceito (que também é muito bem-vindo, sempre que acompanhado de uma discussão dos seus exemplos).

Diz-se que dois aspectos ou características de um fenômeno, objeto ou conceito são complementares pelo PCEM se, por um determinado ponto de vista ou referência, eles possuem características ou sentidos distintos, porém existe uma relação dinâmica entre eles, e ainda, se é possível, por meio de cada um deles, fazer uma interpretação parcial deste fenômeno, mas para que se possa fazer, mediante uma análise epistemológica e cognitiva, uma interpretação mais profunda e detalhada deste fenômeno, é necessário utilizar os dois aspectos ou características concomitantemente.

Por fim, o objetivo deste artigo foi mostrar que, ao adaptar o conceito original de complementaridade para a Educação Matemática, Otte ofereceu uma oportunidade de adaptação deste mesmo conceito em qualquer outra área da educação, quer seja na educação convencional e curricular, quer seja na educação técnica ou tecnológica.

Como já é de conhecimento, diversas áreas do conhecimento humano, como a Psicologia, a Biologia e a própria Física, utilizam os conceitos da Complementaridade como metodologia para a explicação, análise ou interpretação de seus fenômenos ou problemas.

A proposta de expandir a utilização da Complementaridade para a educação técnica ou tecnológica poderá trazer um benefício no desenvolvimento de seus conteúdos, quer seja no aspecto metodológico, quer seja no aspecto organizacional, pois um maior conhecimento dos aspectos cognitivos do aprendizado técnico ou tecnológico poderá auxiliar no planejamento de atividades de aprendizado que levem em conta os aspectos histórico-filosóficos e que podem ser observados quando se estuda o processo ocorrido durante a construção e desenvolvimento dos seus conteúdos específicos.

Um exemplo de aplicação da Complementaridade na educação técnica ou tecnológica, podemos encontrar nas relações entre uma máquina (objeto) e sua representação por meio de um esquema (desenho, diagrama ou maquete). Certas propriedades só são observáveis no próprio objeto, outras somente por meio do esquema e, com o conhecimento do conjunto de todas essas propriedades é possível ter um maior conhecimento técnico sobre o funcionamento dinâmico da máquina.

Desta forma, este artigo é também voltado aos alunos dos cursos de graduação que se enquadrem na categoria tecnológica, para que, ao se apropriarem desta metodologia, possam desenvolver trabalhos acadêmicos que contemplem as exigências curriculares de formação e ao mesmo tempo, possam promover um maior conhecimento das relações dinâmicas e complementares entre os conhecimentos sintéticos adquiridos durante a sua formação e a capacidade de criar novos conhecimentos analíticos no desenvolvimento de atividades acadêmicas inerentes à sua formação.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. (2000). **Dicionário de filosofia**. 4ª. ed. São Paulo: Martins Fontes.

BARROS, L. G. X., FRANÇA, S. M. (2018). **A complementaridade entre criação e descoberta na construção do conhecimento matemático**. Caminhos da Educação Matemática em Revista, v. X, p 40-46, 2018.

FRANÇA, S. M. (2017). **Um estudo sobre complementaridades presentes na construção da teoria dos números complexos.** Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN). São Paulo/SP.

FREGE, G. (2009). **Lógica e filosofia da linguagem.** 2ª. edição. São Paulo: Edusp. ISBN 978-85-314-1180-9.

HOLTON. G. (1984). **As raízes da complementaridade**. Tradução de Dinorah de Oliveira Mendes. Humanidades, vol. II nº9. São Paulo.

OTTE, M. (2003). ***Complementarity, sets and numbers.*** *Educational Studies in Mathematics.* v. 53, p. 203-228.